力学 & 理论力学

Siyan Dong

第 1 章　质点力学

1.1　运动的描述

1.1.1　空间直角坐标系

- 位置关系 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- 速度关系：$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$
- 加速度关系: $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

1.1.2　极坐标系

- 位置关系：$\vec{r} = r\overrightarrow{e_r}\ r = r(t) \quad \theta = \theta(t)$
- 速度关系：$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
- 加速度关系：$\vec{a} = (\ddot{r} - r\theta^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$
  其中第二项也可以写作：$\frac{1}{r} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$, 在推导行星运动时和掠面速度有关

1.1.3　自然坐标系

常用于轨道给定情况下，规定从参考点 O 点起，指向运动方向一侧 $s > 0$, 反之亦然。规定如下：
轨迹切向 : $\overrightarrow{e_\tau} = \frac{d\overrightarrow{r}}{ds}$
轨迹主法向：$\overrightarrow{e_n} = \frac{d\vec{e_\tau}}{ds} / \left| \frac{d\vec{e_\tau}}{ds} \right|$ 指向轨道凹侧
轨迹次法向 : $\overrightarrow{e_\nu} = \overrightarrow{e_\tau} \times \overrightarrow{e_n}$
其曲率半径为：$R = 1/\left| \frac{d\vec{e_\tau}}{ds} \right|$
速度：$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{e_\tau}$
加速度 : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\overrightarrow{e_\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{e_\tau}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\overrightarrow{e_\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\overrightarrow{e_\tau}}{ds}$
我们最后可以得到：$\vec{a} = a_\tau\overrightarrow{e_\tau} + a_n\overrightarrow{e_n}$ 其中 $a_\tau = \ddot{s}$ 成为切向加速度，$a_n = \frac{v^2}{R}$ 成为法向加速度

1.1.4　柱坐标系—类似极坐标 +z 轴

1.1.5　球坐标系

- 位置关系:$\vec{r} = r\overrightarrow{e_r}$
- 速度关系:$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\overrightarrow{e_\phi}$
- 加速度关系:$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\overrightarrow{e_\theta} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\overrightarrow{e_\phi}$

1.2 坐标系转换

1.2.1 平动坐标系转换

绝对 = 相对 + 牵连；其非惯性系中受力引入非惯性力 $F = -ma$

1.2.2 转动参考系之间的转变

先考虑一个较为特殊的情况：参考系绕一轴线以角速度 转动，其转轴过 O 点，质点固定于转动参考系，其在绝对参考系下可以看到其牵连速度：$\overrightarrow{v_r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 可以将其结果推广为：A 的牵连变化率 $= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v_0} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$$

加速度：

$$\vec{a} = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{a_0} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

$$\boldsymbol{F}' = -m\boldsymbol{a}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

1.3 质点运动定理

1.3.1 牛顿三大定律

第一定律：任何一个物体在不受外力或受平衡力的作用（合外力为零）时，总是保持静止状态或匀速直线运动状态，直到有作用在它上面的外力迫使它改变这种状态为止
第二定律：物体的加速度跟物体所受的合外力成正比，跟物体的质量成反比，加速度的方向跟合外力的方向相同
第三定律：两个物体之间的作用力和反作用力，总是同时在同一条直线上，大小相等，方向相反

1.3.2 相对性原理

力学相对性原理（伽利略相对性原理）仅指经典力学定律在任何惯性参考系（惯性系）中数学形式不变，换言之，所有惯性系都是等价（平权）的。

1.4 功与能

1.4.1 功与功率

$$\text{功:}\quad W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\text{功率:}\quad P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

1.4.2 能

理论力学中，研究的能量仅限于机械能，分为动能和势能

1.4.3 保守力、非耗散力、耗散力与势能

保守力：力所做的功与路径无关

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla V} = -(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k})$$

非保守力：所做的功和中间路径有关，或沿着任意闭合路径运行一周所做功不为 0。摩擦力做功与路径有关，但总是负功消耗能量，所以又叫耗散力。

1.5 质点动力学的基本定理和基本守恒定律

1.5.1 动量定理和动量守恒

动量定理：$F=\frac{d}{dt}(mv)=\frac{dp}{dt}$, 外力矩为 0 时，$p=mc=C$;

1.5.2 角动量

力矩:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}\\&=\left(yF_z-zF_y\right)\boldsymbol{i}+\left(zF_x-xF_z\right)\boldsymbol{j}+\left(xF_y-yF_x\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

其中括号项为力矩 $\boldsymbol{M}$ 在三坐标轴的分量
角动量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\P_x&P_y&P_z\end{vmatrix}\\&=m(y\dot{z}-z\dot{y})\boldsymbol{i}+m(z\dot{x}-x\dot{z})\boldsymbol{j}+m(x\dot{y}-y\dot{x})\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

角动量定理：$\frac{dJ}{dt}=M$
注：当角动量为常矢量时，角动量的方向不发生改变，与其垂直的位矢也不会发生改变 (即在一个平面上运动，有心力的性质)

1.5.3 动能定理和能量守恒

$$W=\Delta E_k \quad ; \; E_k+E_p=E$$

1.5.4 势能曲线

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)=E$ 以小振子势能曲线为例：可以通过从势能大小与总能量大小做比较进行分析，运动情况的可能性; 通常考察一阶导（平衡位置）、二阶导（平衡类型）

1.6 有心力

1.6.1 有心力的基本讨论和比奈公式

有心力角动量守恒: $mr^2\dot{\theta}=mh$
有两个方程可以作为基本方程:

$$\begin{aligned}&m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F(r)\\&r\dot{\theta}^2=h\end{aligned}$$

并且 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ ，说明其保守力
有势能 $\boldsymbol{F}=-\nabla\boldsymbol{V}$ $\int_{r_1}^{r_2}F(r)dr=-\left(V_2-V_1\right)$ ，设势能为 $V(r)$ ，则有:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V(r)=E$$

已知 $r^2\dot{\theta}=h$ ， $u=\frac{1}{r}$ 替换，有 $\dot{\theta}=hu^2$，通过计算可以得到:

$$\dot{r}=-h\frac{du}{d\theta} \quad \ddot{r}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

可以得到比奈公式:

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m}$$

1.6.2 平方反比力

设平方反比力: $F=-mku^2$

代入比奈公式得: $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}+u=\dfrac{k^2}{h^2}$ ，令$u=\xi+\dfrac{k^2}{h^2}$ ，可以得到$\dfrac{d^2\xi}{d\theta^2}+\xi=0$, 最后有 $\xi=A\cos(\theta-\theta_0)$

那么有解:$u=\xi+\dfrac{k^2}{h^2}=A\cos(\theta-\theta_0)+\dfrac{k^2}{h^2}$ 或$r=\dfrac{1}{r}=\dfrac{\frac{h^2}{k^2}}{1+\frac{Ah^2}{k^2}[\cos(\theta-\theta_0)]}$

与标准圆锥曲线方程$r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ (注：p 是圆锥曲线正焦弦长度的一半) 比较可知:

$$p=\frac{h^2}{k^2} \quad e=Ap=\frac{Ah^2}{k^2}$$

当 $e<1$ 时，椭圆；$e=1$ 时抛物线；$e>1$ 时，双曲线；引入引力势能：$V(r)=-\frac{km^2}{r}$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{km^2}{r}=E$$

我们可以得到：做变换：$\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$ 得到：

$$\frac{1}{2}m[\frac{h^2}{r^4}(\frac{dr}{d\theta})^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{2k^2}{r}]=E$$

$$d\theta=\frac{hdr}{r\sqrt{\frac{2E}{m}r^2+2k^2r-h^2}}$$

我们可以得到离心率 e :

那么我们就可以通过 E 来判断轨道类型：$E<0$, 椭圆；$E=0$, 抛物线；$E>0$, 双曲线；

1.6.3 开普勒定律与宇宙速度

(一) 开普勒定律

- 第一定律：所有行星绕恒星运动的轨道都是椭圆，且恒星处在椭圆的某个焦点上；
- 第二定律：对任意一个行星来说，它与太阳的连线在相等的时间内扫过的面积相等；$\dot{A}=r^2\dot{\theta}$
- 第三定律：所有行星的轨道的半长轴的三次方和它的公转周期的二次方的比值都相等；

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2p}{h^2}$$

(二) 宇宙速度: 第一宇宙速度：$7.9km/s$ 第二宇宙速度 : $11.2km/s$ 第三宇宙速度 : $16.7km/s$

第 2 章 质点系力学

2.1 质点系

- 内力外力、相互作用力的概念要清楚；推导略
- 质心：$\overrightarrow{r_c} = \frac{\Sigma_i m_i \overrightarrow{r_i}}{\Sigma_i m_i}$（连续的积分就行）
- 质心参考系：简化，相对质心总动量 0

2.2 动量定理和动量守恒定律

2.2.1 动量定理

$$\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i \ \mathrm{d}t = \vec{P} - \vec{P}_0 = \Delta \vec{P} \tag{2.1}$$

微分表达式：

$$\Sigma \overrightarrow{F_i} dt = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{2.2}$$

2.2.2 质心运动定理

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_C \tag{2.3}$$

质心运动定理：作用于质点系上的合外力等于质点系的总质量与质心加速度的乘积；
质心性质：

- 系统合外力为 0，质心的速度为一个恒矢量。内力不改变质点系的总动量，也不能改变质心的运动状态
- 系统在合外力作用下，质心的加速度等于等于外力的矢量和除以系统的总质量

2.2.3 动量守恒定律

当系统的合外力为 0 时，系统的总动量保持不变

- 总动量守恒不是各个质点的动量守恒，而是系统动量守恒
- 外力远小于内力时，也可以应用
- 质心做匀速运动时，质心系为惯性系

2.3 角动量定理和角动量守恒

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt} \tag{2.4}$$

质点系对于任一作用点的角动量对时间的微商等于外力对同一点的力矩的矢量和；
当 $\vec{M} = 0$, 则 $\vec{J} = \vec{c}$ 意义：质点系不受外力作用时或虽受外力作用，但这些对某定点的力矩的矢量和为 0, 则对此定点而言，质点系动量矩为一恒矢量。
也可以使用分量表达式：

当 $\overrightarrow{M_x}$ 对于 0 时，则 $J_x=\sum_{i=1}^n m_i\left(y_i\dot{z}_i-z_i\dot{y}_i\right)=c$
角动量守恒定律是普适的

2.3.1 质心参考系下

$$\frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{J}_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{J}'}{\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$

2.4 动能定理和机械能守恒

2.4.1 质点系的动能定理

$$W_{\text{外}}+W_{\text{内}}=T-T_0 \tag{2.6}$$

注意：质点系内力做功之后不一定为 0

2.4.2 机械能守恒

$$\begin{aligned}
&W_{\text{外}}+W_{\text{保内}}+W_{\text{非保内}}=T-T_0\\
&W_{\text{保内}}=-(V-V_0)\\
&W_{\text{外}}+W_{\text{非保内}}=(T+V)-(T_0+V_0)\\
&W_{\text{外}}+W_{\text{非保, 内}}=E-E_0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

注意：机械能守恒仅适用于惯性系，不适合非惯性系，因为惯性力可能做功；
在某个惯性系中机械能守恒，但是在另外一个惯性系中机械能不一定守恒。因为外力的功和参考系的选择有关；

2.4.3 柯尼希定理

$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_C^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i\dot{\vec{r}}_i'^2 \tag{2.8}$$

也可以用文字语言表述：

$$\text{质点系动能}=\text{质心的动能十相对质心的动能}$$

由此讨论问题都会比较方便，分开讨论，利用质心系的性质进行简化；

2.5 其他

- 质心系下讨论两体问题：引入折合质量：$\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{m}$
- 中心势场问题有效势能降低自由度 + 画图分析等
- 散射角 $\tan\theta_r=\frac{V_1'\sin\theta_C}{V_1'\cos\theta_C+V}=\frac{\sin\theta_C}{\cos\theta_C+\frac{m_1}{m_2}}$
- 变质量物体运动问题：$\frac{d}{dt}(m\vec{v})-\frac{dm}{dt}\vec{u}=\vec{F}$　火箭反冲原理
- 位力定理：$\bar{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_{i=1}^n\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i}$

第 3 章 刚体力学

3.1 物理量的类比

$$
\begin{aligned}
&\vec{r} \to \theta && \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \to \vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} \\
&\vec{v} \to \vec{\omega} && \vec{F} = m\vec{a} \to \vec{M} = I\vec{\beta} \\
&\vec{a} \to \vec{\beta} && E_k = \frac{1}{2}mv^2 \to E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&m \to I && \mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \to \ \mathrm{d}W = M\ \mathrm{d}\theta \\
&\vec{F} \to \vec{M} && \vec{P} = m\vec{v} \to \vec{J} = I\vec{\omega} \\
&\vec{p} \to \vec{J} &&
\end{aligned}
$$

3.2 刚体运动分析

1）描述刚体运动的独立变量一般需要 6 个独立变量确定刚体位置的三种方法：

- 不共线的三个点
- 任一点与过该点的一轴线加绕转轴的转角
- 任一点和三个独立的角度（欧拉角）

2）刚体运动的分类

- 平动：仅需要一个质点的运动，3 个自由度
- 转动：定轴转动，转角 θ 一个自由度
- 平面平行运动：平面内平动 2 个自由度，刚体本身平面内转动需要转角 θ，1 个自由度
- 定点转动：一点固定不动，刚体绕过该点的某一瞬时轴转动
- 一般运动: 质心平动 + 绕质心的定点转动

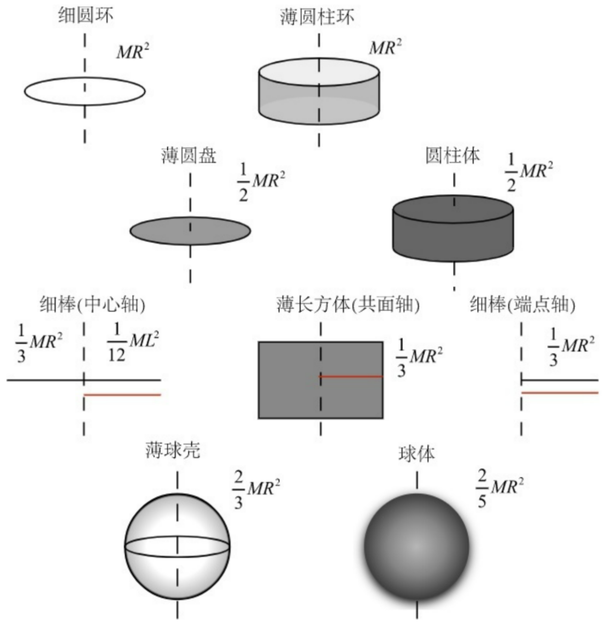
3.3 解刚体问题

刚体定轴运动的特殊广义坐标欧拉角：自转角 ψ, 进动角 φ, 章动角 θ。
需要明白，角位移的顺序不可交换的性质，但在连续的小角极限下适用于矢量的运算形式。
刚体运动角动量的确定，一般由惯量张量矩阵中的九个变量计算而得：

$$
\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{3.1}
$$

$$
\boldsymbol{I} = \int \mathrm{d}^3 x \rho\left(\boldsymbol{x}\right) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}
$$

另外：惯量主轴就是对称性集中体现的轴；
一般用到常见的刚体对应的转动惯量



惯量主轴（对角化后）：

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

以及平行轴定理：

$$I_{ij}^{(P)} = I_{ij}^{(C)} + M\left(\boldsymbol{r}^2\delta_{ij} - r_i r_j\right). \tag{3.4}$$

任一时刻，薄片上有一点速度为零，叫做转动瞬心（C）几何法—找两个点的速度作垂线的交点就是 C
用惯量张量写动能：

$$T = \frac{1}{2}(\omega_x\omega_y\omega_z)\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

3.4 章动角 *

一般用于坐标变换需要：

$$\boldsymbol{R}(\phi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\theta\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \cos\theta\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

第 4 章　分析力学

4.1　基本概念

4.1.1　约束与自由度

物理系统须满足的关于广义坐标和广义速度的关系式称为该物理系统的约束（constraint）；自由度（degree of freedom）为独立广义坐标的变分的个数。独立广义坐标的变分的数目决定了物理系统在位形空间中有几个维度是可以独立变化的。
分类：完整与非完整、单侧与双侧、定常与非定常。

4.2　度规

二次型的系数构成的对称矩阵 g_{ab} 被称作度规（metric），主要通过线元来求：

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{d}q^1 & \cdots & \mathrm{d}q^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s1} & \cdots & g_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}q^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}q^s \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

4.3　虚功原理

4.3.1　虚位移

虚位移定义 (以下讨论仅考虑完整约束)：
1. 定常约束下，一切符合约束条件下的无限小的可能的位移
2. 非定常约束下，我们假定时间在某一时刻冻结，满足该瞬间的约束条件的无限小可能的位移
我们都将其虚位移记作 $\delta \dot{r}$
设有 n 个质点的系统，存在 m 个完整约束，其满足约束方程：

$$f_j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n; t) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.2}$$

那么对应下一个无限小时刻的 $\boldsymbol{r}_i + \delta\boldsymbol{r}_i$ 也满足上述关系：$f_j(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 + \delta\boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n + \delta\boldsymbol{r}_n; t) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$ 我们假定时间冻结，对上述式子做 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 的多元泰勒展开，且保留第一项：

$$\Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{\nabla} f_j \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.3}$$

而真实位移 $d\boldsymbol{r}_i$, 在非定常约束下

$$f_j(\boldsymbol{r}_1 + d\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 + d\boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n + d\boldsymbol{r}_n) = 0 \tag{4.4}$$

同理可得：

$$\Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{\nabla}_i f_j \cdot d\boldsymbol{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.5}$$

4.3.2　理想约束和虚功原理

显然，我们可以定义力和虚位移的点乘为虚功我们首先讨论约束力，记约束力为 N_i , 其虚位移为 $\delta\boldsymbol{r}_i$, 那么约束力的虚功可以表示为 $\delta W = \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i$ 我们定义，当系统内含有多种类约束，其虚功为 0，即

$$\delta W = \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{4.6}$$

这样的约束为理想约束; 又平衡态满足 $F_i + N_i = 0$（主动力与约束力关系）那么对所有质点进行累加，即

$$\delta W = \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta r_i + \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta r_i = 0 \tag{4.7}$$

又因为理想约束，那么 $\Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$, 所以我们就能得到虚功原理：

$$\delta W = \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta r_i = 0 \tag{4.8}$$

4.3.3 广义坐标下的虚功原理

广义坐标中，质点的虚位移也表示为

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \Sigma_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \tag{4.9}$$

将其代入虚功原理，就可以得到广义坐标系下的虚功原理

$$\begin{aligned} \delta W &= \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot (\Sigma_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha) \\ &= \Sigma_{\alpha=1}^{s} (\Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}) \delta q_\alpha) = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

把各个广义虚位移 δq_α 的系数记作 Q_α(广义力) 得虚功原理：

$$Q_\alpha = \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \tag{4.11}$$

在解题中，先列出主动力和直角坐标系下虚位移的乘积，然后用广义坐标改写虚位移，使得广义坐标的虚位移对应的广义力为 0

4.3.4 主动力为保守力的系统平衡方程

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s) \tag{4.12}$$

注意：我们在使用广义坐标的时候，V 通常是不能再被视为各部分势能之和。所以上式也可以进行如下推导得到：

$$Q_\alpha = \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = -\Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{4.13}$$

平衡方程：

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{4.14}$$

4.3.5 约束力的求解————拉格朗日乘子法

首先给出新的拉式量与作用量：

$$\tilde{S}[\boldsymbol{q}, \lambda] \equiv \int \mathrm{d}t \tilde{L} = \int \mathrm{d}t \left[L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \lambda(t) \phi(t, \boldsymbol{q}) \right] \tag{4.15}$$

再进行变分（联立可以求出 λ）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}^{a}}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q^{a}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^{a}}-\frac{\partial L}{\partial q^{a}}-\lambda\frac{\partial\phi}{\partial q^{a}}=0,\quad a=1,2...s,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\lambda}}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\lambda} &= -\phi=0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

对于约束 $f(\{q^{\alpha}\})=0$, 给出约束力：

$$Q_{\alpha}=\lambda\partial_{\alpha}f,$$

4.4 达朗贝尔原理

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i}-m_{i}\ddot{\vec{r}}_{i}\right)\cdot\delta\vec{r}_{i}=0 \tag{4.17}$$

若考虑存在非理想约束，该原理也适用，它可以叙述为：主动力和非理想约束力以及惯性力的虚功之和为零；该原理也是分析力学的普遍原理

4.5 基本拉格朗日方程以及导出

4.5.1 拉格朗日关系

- $\frac{\partial\dot{r}_{i}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{\alpha}}\left(\frac{\partial\vec{r}_{i}}{\partial t}+\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\dot{r}_{i}}{\partial q_{\beta}}\dot{q}_{\beta}\right)=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\partial_{i}}{\partial q_{\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{\beta}}{\partial\dot{q}_{\alpha}}=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_{i}}{\partial q_{\beta}}\delta_{\beta\alpha}=\frac{\partial\vec{r}_{i}}{\partial q_{\alpha}}$
- 位矢对广义坐标和时间的偏导数可以对易（$\frac{d}{dx}and\frac{\partial}{\partial_{\alpha}}$）

4.5.2 拉格朗日方程

从达朗贝尔原理可以推出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\alpha}}-\frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}}=Q_{\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{4.18}$$

广义动量、广义速度、广义力；
于是上式可以表述为广义动量的时间变化率对于广义主动力与拉格朗日力之和
在保守系中，引入 $L=T-V$，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{4.19}$$

推导可以由**变分法（最小作用量原理）+ 分部积分**得到（我们考虑等时变分）

$$\delta S\simeq-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^{a}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^{a}}\right]\delta q^{a}=0 \tag{4.20}$$

4.6 两体问题

4.6.1 两体系统

重要：**质心系、约化质量** $m_{\mathrm{r}}\equiv\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$
相对运动的拉氏量：

$$L_{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{r}}^{2}\dot{\boldsymbol{r}}^{2}-V\left(r\right) \tag{4.21}$$

4.6.2 中心势场

平面极坐标下：

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)-V\left(r\right) \tag{4.22}$$

这时 ϕ 是循环坐标，共轭动量是运动常数 (减少了一个自由度):

$$p_{\phi}\equiv mr^2\dot{\phi}=J=\text{const} \tag{4.23}$$

进一步得到：

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J^2}{2mr^2}+V\left(r\right) \tag{4.24}$$

有效势能：

$$V_{\text{eff}}\left(r\right)=V\left(r\right)+\frac{J^2}{2mr^2} \tag{4.25}$$

积分得到：

$$t=\pm\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V\left(r\right)\right)-\frac{J^2}{m^2r^2}}} \tag{4.26}$$

消去时间 t

$$\frac{mr^2}{J}\mathrm{d}\phi=\pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V\left(r\right)\right)-\frac{J^2}{m^2r^2}}}. \tag{4.27}$$

对上式积分，即可得到轨道方程 $r=r(\phi)$

4.6.3 开普勒问题

与到中心的距离成反比的中心势场：$V\left(r\right)=-\frac{\alpha}{r}$

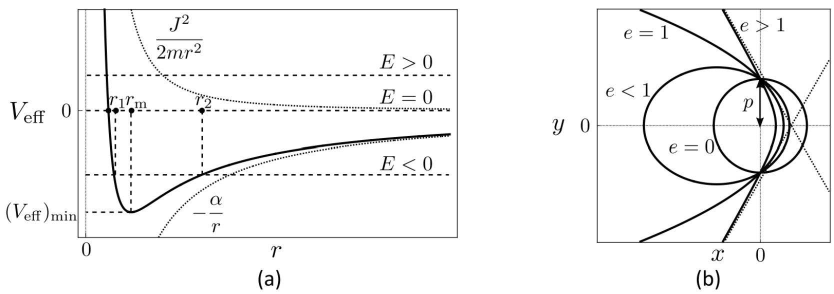


图 1: (a) 开普勒问题中径向运动的有效势能。(b) 给定 p、不同偏心率 e 对应的轨道

求解：

$$\phi\left(r\right)=\int\frac{J}{mr^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{m^2r^2}}}. \tag{4.28}$$

引入：

$$p:=\frac{J^2}{m\alpha},\quad e:=\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}} \tag{4.29}$$

得到解为：

$$r\left(\phi\right)=\frac{p}{1+e\cos\phi} \tag{4.30}$$

4.7 小振动

4.7.1 平衡位置附近做微扰展开到二阶

$$V=V_0+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right)\bigg|_0 q_\alpha+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta=1}}^{s}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right)\bigg|_0 q_\alpha q_\beta+O\left(q^2\right) \tag{4.31}$$

因为在平衡状态时，满足 $\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial V}{\partial q_\alpha})|_0 q_\alpha=0$, 即势能曲线的平衡位置偏导为零，并二阶以上的小项，并令 $V_0=0$, 那么有：

$$V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}c_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$$

在稳定约束时，动能也满足：$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$
这里处理问题（特别是势能项）, 会经常用到一些近似处理：$cos\theta\ 1-(\frac{\theta^2}{2})$; $sin\theta\ \theta$; $(1+x)^\alpha\ 1+\alpha x...$

4.7.2 问题求解

系统的二次作用量可以写为：

$$S_2\left[q\right]=\int \mathrm{d}t\left(\frac{1}{2}G\dot{q}^2-\frac{1}{2}Wq^2\right) \tag{4.32}$$

矩阵形式：

$$L_2=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{q}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{q} \tag{4.33}$$

G 和 W 是常对称矩阵，且我们假设都是非退化且正定的。运动方程表示为：

$$\boldsymbol{G}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}=0 \tag{4.34}$$

通过猜测试解 (通解形式)

$$\boldsymbol{q}\left(t\right)=\boldsymbol{A}e^{-i\omega t}+\boldsymbol{A}^{*}e^{+i\omega t}=\boldsymbol{A}e^{-i\omega t}+\mathrm{c.c.} \tag{4.35}$$

推出条件：

$$\left(\boldsymbol{W}-\omega^2\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{A}=0 \tag{4.36}$$

下面就是考察线性代数的知识啦, 总结如下：

- 写出系统二次拉格朗日量中的 G 和 W 矩阵；
- 根据特征方程 ($det(W-w^2G=0)$), 求特征频率 ω_α;
- 对每一个特征频率，根据 (4.26) 求对应的特征矢量 A_α, 从而得到所有的简正模式；
- 根据 (4.25) 对所有的简正模式求和，得到通解；
- 根据初始条件，确定待定系数。

第 5 章　哈密顿力学

5.1　哈密顿正则方程

前文所提，任意拉格朗日函数加上一个时间的全导数后，仍可满足原来的拉氏方程。广义坐标与广义动量 ($p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}$) 则出现了无限种对应方式。
现在，将拉格朗日函数替换掉，放弃 $L = T - V$ 的规范条件，在保持广义动量与广义坐标的独立下，以正则共轭坐标描述系统。
进行全微分操作后，得到全新的哈密顿量：

$$H\left(p, q, t\right) = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{5.1}$$

进而得到哈密顿正则方程：

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \tag{5.2}$$

另有：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{5.3}$$

5.2　解题小结

- 计算共轭动量 $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \equiv p_a\left(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right)$；
- 从共轭动量的表达式 $p_a = p_a\left(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right)$ 中反解出广义速度，作为广义坐标和广义动量的函数 $\dot{q}^a = \dot{q}^a\left(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right)$
- 将 $\dot{q}^a = \dot{q}^a\left(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right)$ 带入哈密顿量的定义 $H = p_a\dot{q}^a - L\left(t, \boldsymbol{q}, \dot{q}\right)$, 将所有的广义速度换成广义坐标和广义动量的函数，得到哈密顿量 $H = H\left(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right)$；
- 对哈密顿量求导，得到哈密顿正则方程 (5.2)。

需要特别强调的是，只有**将所有的广义速度换成广义坐标和广义动量的函数**后，才能将 $H = H\left(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\right)$ 称为哈密顿量。

5.3　Possion bracket

5.3.1　引入——相空间的辛结构

单自由度的哈密顿正则方程可以改写为：

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

对 s 个自由度，有 s 个广义坐标和 s 个广义速度；我们统一用 2s 个新坐标代替：并引入：

$$\omega^{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{s\times s} & \mathbf{1}_{s\times s} \\ -1_{s\times s} & \mathbf{0}_{s\times s} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$\boxed{\dot{\xi}^\alpha = \omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}}, \quad \alpha = 1, \cdots, 2s. \tag{5.6}$$

5.3.2 泊松括号定义

用辛矩阵定义的“辛内积”为：

$$[f,g]:=\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial\xi^{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial\xi^{\beta}} \tag{5.7}$$

即被称为力学量 f 和 g 的泊松括号（由于辛结构具有反对称的性质）泊松括号的几何意义也非常直观，即力学量的梯度 ∇f 和 ∇g（两个矢量）所构成的平行四边形的面积
更为常用的是：

$$[f,g]=\frac{\partial f}{\partial q^{a}}\frac{\partial g}{\partial p_{a}}-\frac{\partial f}{\partial p_{a}}\frac{\partial g}{\partial q^{a}} \tag{5.8}$$

利用泊松括号的双线性、反对称、求导等性质进行计算；
基本泊松括号：

$$\left[q^{a},q^{b}\right]=0,\quad [p_{a},p_{b}]=0,\quad [q^{a},p_{b}]=\delta_{b}^{a},\quad a,b=1,\cdots,s \tag{5.9}$$

5.3.3 力学量的演化

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H] \tag{5.10}$$

当时间全导数为 0 时，称为运动常数；
泊松定理如果 f 和 g 是系统的两个运动常数，则两者的泊松括号 [f, g] 也是系统的运动常数：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=0,\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}\,[f,g]}{\mathrm{d}t}=0 \tag{5.11}$$

但是不一定遍历系统的运动常数，且得到的可能不独立；

5.4 正则变换

正则变换是相空间的流动—保辛

5.4.1 生成函数

$$\mathrm{d}F=p_{a}\mathrm{d}q^{a}-P_{a}\mathrm{d}Q^{a}+\left[K\left(t,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}\right)-H\left(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\right)\right]\mathrm{d}t \tag{5.12}$$

固定时间：

$$p_{a}\delta q^{a}-P_{a}\delta Q^{a}=\delta F. \tag{5.13}$$

容易得到：

$$\frac{\partial F\left(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q}\right)}{\partial q^{a}}=p_{a},\quad\frac{\partial F\left(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q}\right)}{\partial Q^{a}}=-P_{a},\quad a=1,\cdots,s, \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial F\left(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q}\right)}{\partial t}=K\left(t,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}\right)-H\left(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\right). \tag{5.15}$$

另外还有其他几种类型生成函数，F1- 4 ；上面是 F1；$F_2(t,q,P)$ 作用量；其他略；
验证正则变换：

- 数学处理变形到（5.13）的全微分形式
- 常用:$[Q,P]==\frac{\partial Q}{\partial q^{a}}\frac{\partial P}{\partial p_{a}}-\frac{\partial Q}{\partial p_{a}}\frac{\partial P}{\partial q^{a}}=1$

第 6 章　哈密顿-雅各比方程

6.1　知识框架

取特殊的哈密顿量：0, 可得到 P, Q 分别为常数。主要思路即是用第二类母函数的性质，向 P, Q 的常数靠近，

$$H^* = H + \partial F/\partial t = 0 \tag{6.1}$$

根据正则变化关系，P,p 均可代换，而将母函数也代换为哈密顿主函数 : $Const + F(q, P, t) = S(q, t)$, 得到哈密顿-雅各比方程：

$$H(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{6.2}$$

当能量守恒时，有可将主函数根据两个坐标与时间而分离 : $S = -Et + W(q) + Const$, 称 W 为哈密顿特征函数。用 $\partial W/\partial q = p$, 换入哈-雅方程，即得特征函数的完整解。

6.2　解题步骤

含时间的特征函数 $W(q, t)$ 中有一组积分常数：

$$\eta_\alpha\{E, \eta_2, ...\eta_s\}$$

哈密顿量为 0 时 P,Q 也为任意常数，利用 $\partial F/\partial P_\alpha =$

$$P_\alpha = \eta_\alpha\{E, \eta_2, ...\eta_s\};\ Q_\alpha = \xi_\alpha\{\xi_1, ...\ \xi_s\}$$

得到雅-哈可解出的两种方程：

(1) 下述 s-1 个方程联立后，解得轨道方程：

$$\frac{\partial F}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial \eta_\alpha} = \xi_\alpha\ ,\ (\alpha \neq 1)$$

(2) 下述方程带入轨道方程后，得到运动方程：

$$\frac{\partial F}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E} = \xi_\alpha = t_0, (\alpha = 1)$$

P.S. 主要参考知乎大佬笔记 + 高显老师的经典力学

诸多疏漏敬请谅解，仅供参考，详略或失当；笔者邮箱 2540181946@$qq.com$ 欢迎指正。